Exercices - Congruences

Exercice 1 Soient a, b, et n trois entiers naturels tels que $a \equiv b\,[n]$.

1. Si $a \equiv 0\,[n]$, alors $ab \equiv b \times 0\,[n]$, donc $ab \equiv 0\,[n]$.
2. $4 \times 9 = 36 = 6 \times 6$ donc $4 \times 9 \equiv 0\,[6]$.
3. Faux, le preuve dans la question précédente.

Exercice 2 Recopier et completer le tableau ci-dessous qui donne modulo 6 le produits des entiers de 0 à 5.

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	2	2
5	0	5	4	3	2	1

1. Oui : $4 \times 3 \equiv 0\,[6]$.
2. Oui : $5 \times 5 \equiv 1\,[6]$.

Exercice 4

1. (a) $2009 = 182 \times 11 + 7$.
   (b) $2^{10} = 1024 = 93 \times 11 + 1$.
   (c) Donc : $2^{2009} + 2009 \equiv 7 + 1 \quad [11]$.
2. On désigne par p un entier naturel.

   On considère pour tout entier naturel non nul n le nombre $A_n = 2^n + p$.

   Soit d_n un diviseur commun de A_n et A_{n+1}, donc d_n divise toute combinaison linéaire de A_n et A_{n+1}. Donc :

$$d_n \mid A_{n+1} - A_n$$

$$d_n \mid 2^{n+1} + p - (2^n + p)$$

$$d_n \mid 2^{n+1} + p - 2^n - p$$

$$d_n \mid 2^{n+1} - 2^n$$

$$d_n \mid 2^n\,(2 - 1)$$

$$d_n \mid 2^n$$

3. On distingue deux cas :
   - Si p est pair, $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors
   $$A_n = 2^n + p = 2^n + 2k = 2\left(2^{n-1} + k\right)$$
   Donc A_n est pair.
   - Si p est impair, $p = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors
   $$A_n = 2^n + p = 2^n + 2k + 1 = 2\left(2^{n-1} + k\right) + 1$$
   Donc A_n est impair.

Exercice 5 *Corrigé en classe.*
Exercice 6 On considère l'équation (E) $11x^2 - 7y^2 = 5$, où x et y sont des nombres entiers.

1. Soit $(x; y)$ une solution de (E), alors $11x^2 - 7y^2 = 5$.
   Or : $11x^2 = 10x^2 + x^2$ donc $11x^2 \equiv x^2 \quad [5]$.
   De même $7y^2 = 5y^2 + 2y^2$ donc $7y^2 \equiv 2y^2 \quad [5]$.

   De plus $11x^2 - 7y^2 = 5 \Longrightarrow 11x^2 \equiv 7y^2 \quad [5]$. Donc :
   $$x^2 \equiv 11x^2 \quad [5] \Longrightarrow x^2 \equiv 7y^2 \quad [5] \Longrightarrow x^2 \equiv 2y^2 \quad [5]$$

2. Soit x et y des entiers. Recopier et completer les tableaux suivants :

Modulo 5, x congru à :	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 congru à :	0	1	4	4	1

Modulo 5, y congru à :	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ congru à :	0	2	3	3	2

3. Si $(x; y)$ est solution de (E), alors d'après la question 2. x^2 et $2y^2$ ont le même reste modulo 5. Dans les deux tableaux précédents, les seuls cas qui vérifient ce résultats sont $x \equiv 0 \quad [5]$ et $y \equiv 0 \quad [5]$.
   Donc x et y sont multiples de 5.

4. Si $(x; y)$ est solution de (E), alors $x = 5k$ et $y = 5k'$, avec k et k' deux entiers.
   $$\begin{aligned} 11x^2 - 7y^2 = 5 &\iff 11 \times (5k)^2 - 7 \times (5k')^2 = 5 \\ &\iff 11 \times 5^2 k2 - 7 \times 5^2 k'^2 = 5 \\ &\iff 55k^2 - 35k'^2 = 1 \end{aligned}$$
   Or, il existe ce genre de relation si et seulement si les entiers 55 et 35 n'ont pas de diviseurs communs autre que 1 *(vous n'avez pas encore vu ce résultat)*. Or 5 divise 55 et 35. DOnc cette équation ne possède pas de solution !

Exercice 7 Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, le nombre $A = 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17.

On commence par faire un changement d'indice, en posant $n = k+1$ pour $k \geqslant 0$. On obtient alors

$$A = 3 \times 5^{2(k+1)-1} + 2^{3(k+1)-2} = 3 \times 5^{2k+1} + 2^{3k+1} = 15 \times 5^{2k} + 2 \times 2^{3k}$$

On a les tableaux suivants :

$k \equiv ...\quad [4]$	0	1	2	3
$5^k \equiv ...\quad [17]$	1	5	8	6
$5^{2k} \equiv ...\quad [17]$	1	8	13	2
$15 \times 5^{2k} \equiv ...\quad [17]$	15	1	8	13
$2^k \equiv ...\quad [17]$	1	2	4	8
$2^{3k} \equiv ...\quad [17]$	1	8	13	2
$2 \times 2^{3k} \equiv ...\quad [17]$	2	-1	9	4
$A \equiv ...\quad [17]$	0	0	0	0

Ainsi on voit que pour tout entier $n \geqslant 1$, $A = 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17.

Exercice 8 Soit $n = \overline{cdu}$ en écriture décimale.

1. On note déjà que $n = \overline{cdu} = c \times 10^2 + d \times 10 + u$.

   On remarque que $10 \equiv 2 \quad [4]$ et $10^2 \equiv 2^2 \quad [4]$. Donc :

   $$\left.\begin{array}{l} c \times 10^2 \equiv 0 \quad [4] \\ \\ d \times 10 \equiv 2d \quad [4] \end{array}\right\} \Longrightarrow c \times 10^2 + d \times 10 + u \equiv 0 + 2d + u \quad [4]$$

   Ainsi : $n \equiv 2d + u \quad [4]$.

   On a donc bien montrer que n est un multiple de 4 si et seulement si $2d + u$ est multiple de 4.

2. Montrer que si n est divisible par 107, alors $7d^2 + (7c-u)^2$ est aussi divisble par 107.

Exercice 9 Ces nombres sont égaux à : $\overline{x3y}^6 = x \times 6^2 + 3 \times 6 + y = 36x + y + 18$, avec x et y deux entiers compris entre 0 et 5.

De plus $\overline{x3y}^6 \equiv 9 \times 4x + y + 9 \times 2 \quad [9]$, donc :

$$\overline{x3y}^6 \equiv y \quad [9]$$

Alors :

$$\overline{x3y}^6 \equiv 0 \quad [9] \Longleftrightarrow y \equiv 0\ [9]$$

y étant compris entre 0 et 5, on en déduit que $y = 0$. Ainsi $\overline{x3y}^6 = \overline{x30}^6 = 36x + 18$.

De plus

$$\begin{aligned}
\overline{x3y}^6 \in [100;200] &\iff 36x+18 \in [100;200] \\
&\iff 100 \leqslant 36x+18 \leqslant 200 \\
&\iff 82 \leqslant 36x \leqslant 182 \\
&\iff \frac{82}{36} \leqslant x \leqslant \frac{182}{36} \\
&\iff 2,278 \leqslant x \leqslant 5,056 \\
&\iff x \in \{3;4;5\}
\end{aligned}$$

Les solutions sont les nombres $\overline{330}^6$, $\overline{430}^6$ et $\overline{530}^6$.

Exercice 10

$n \equiv ...[6]$	0	1	2	3	4	5
$2n+1 \equiv ...[6]$	1	3	-1	1	3	-1
$7n+1 \equiv ...[6]$	1	2	3	-2	-1	0
$N \equiv ...[6]$	0	0	0	0	0	0

Donc on voit bien que pour tout entier n, $N = n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6.