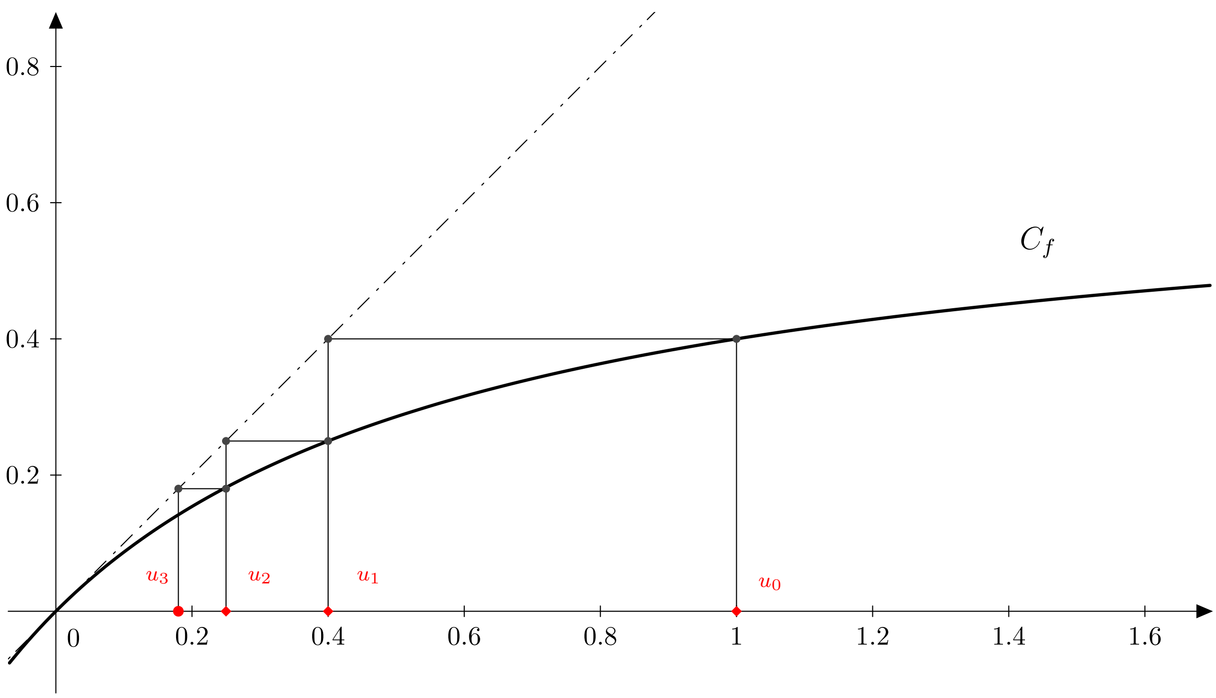
Devoir Maison - correction

1. $u_1 = \dfrac{2u_0}{2+3u_0} = \dfrac{2}{2+3} = \dfrac{2}{5}$ et $u_2 = \dfrac{2u_1}{2+3u_1} = \dfrac{2\times\frac{2}{5}}{2+3\times\frac{2}{5}} = \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{16}{5}} = \dfrac{1}{4}$

2. La suite n'est ni arithmétique, ni géométrique. En effet, on ne reconnait pas les expression d'une telle suite par récurence. Une suite arithmétique s'écrit : $u_{n+1} = u_n + r$ et une suite géométrique s'écrit : $u_{n+1} = q \times u_n$.

3.



La suite (u_n) semble être décroissante.

4. On considère la proposition suivante : $P_n \quad : \quad u_n > 0$, pour tout entier naturel, que l'on démontre par récurence.

   - Initialisation : Prouvons que P_0 est vraie. En effet, $u_0 = 1 > 0$, donc P_0 est vraie.
   - Hérédité : Soit $N \in \mathbb{N}$, on suppose que P_N est vraie. C'est à dire que $u_N > 0$.
     Prouvons que P_{N+1} est vraie, c'est à dire, prouvons que $u_{N+1} > 0$.
     Or, $u_{N+1} = \dfrac{2u_N}{2+3u_N}$ et :

$$\left.\begin{array}{l} u_N > 0 \text{ (hypothèse de récurence) } \Longrightarrow 2u_N > 0 \\ \\ \text{et } u_N > 0 \Longrightarrow 3u_N > 0 \Longrightarrow 2+3u_N > 2 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{2u_n}{2+3u_n} > 0$$

     Donc $u_{N+1} > 0$ et ainsi P_{N+1} est vraie.

- Conclusion : la propriété P_n est vraie au rang 0 et est héréditée, donc elle est vraie pour tout entier naturel. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_N > 0$, et par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_N \neq 0$$

5. (a) $v_0 = \dfrac{2}{u_0} = \dfrac{2}{1} = 2$, $v_1 = \dfrac{2}{u_1} = \dfrac{2}{\frac{2}{5}} = 5$ et $v_2 = \dfrac{2}{u_2} = \dfrac{2}{\frac{1}{4}} = 8$

La seuite (v_n) semble débuter comme une suite arithmétique de raison r=3.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{2}{u_{n+1}} = \frac{2}{\dfrac{2u_n}{2+3u_n}} = \frac{2(2+3u_n)}{2u_n} = \frac{2+3u_n}{u_n} = \frac{2}{u_n} + \frac{3u_n}{u_n} = \frac{2}{u_n} + 3 = v_n + 3$$

Remarque : on a pu simplifier par u_n dans la dernière égalité car $u_n \neq 0$!

Donc pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = u_n + 3$, la suite est donc arithmétique de raison $r = 3$.

(c) Ainsi, pour tout entier naturel n, on a

$$v_n = v_0 + n \times r = 2 + 3n$$

Or, $v_n = \dfrac{2}{u_n} \Longrightarrow u_n = \dfrac{2}{v_n} = \dfrac{2}{2+3n}$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2}{2+3n}$$

6. Pour étudier les variations de la suite, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{2+3(n+1)} - \frac{2}{2+3n} = \frac{2}{5+3n} - \frac{2}{2+3n} = \frac{2(2+3n) - 2(5+3n)}{(5+3n)(2+3n)}$$
$$= \frac{4+6n-10-6n}{(5+3n)(2+3n)} = \frac{-6}{(5+3n)(2+3n)}$$

Or :

$$\left.\begin{array}{l} -6 < 0 \\ 5+3n > 0 \text{ car } n \geq 0 \Longrightarrow 5+3n \geq 5 > 0 \\ 2+3n > 0 \text{ car } n \geq 0 \Longrightarrow 2+3n \geq 2 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{-6}{(5+3n)(2+3n)} < 0$$

Donc, $u_{n+1} - u_n < 0$. Ainsi pour tout entier naturel n, $u_{n+1} < u_n$, la suite est donc décroissante comme nous l'avons conjecturé à la question 3.