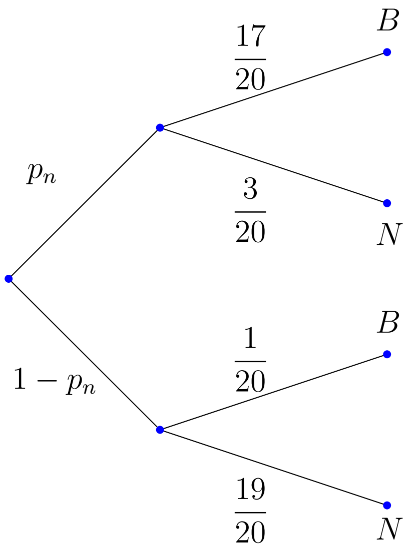
Correction - Bac blanc février 2014

Exercice 1

1. On a dans l'urne U_1, 17 boules blanches, donc $p_2 = \dfrac{17}{20} = 0,85$.

2. On peut s'aider d'un arbre. Pour obtenir p_{n+1} il faut considérer les cas où l'on a tiré au rang précédent une boule blanche :



D'après la formule des probabilités totales : On a donc $p_{n+1} = \dfrac{17}{20}p_n + (1-p_n) \times \dfrac{1}{20} = \dfrac{16}{20}p_n + \dfrac{1}{20}$.
Conclusion $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,05$.

3. D'après la formule trouvée
$p_3 = 0,8p_2 + 0,05 = 0,8 \times 0,85 + 0,005 = 0,68 + 0,05 = 0,73$.

4. (a) Initialisation : $p_1 = 1 > 0,25$.
Hérédité : supposons qu'au rang $n_0, p_{n_0} > 0,25$, alors $0,8p_{n_0} > 0,2$ et ensuite $0,8p_{n_0} + 0,05 > 0,2 + 0,05$ ou encore $p_{n_0+1} > 0,25$.
On a donc montré par récurrence sur n que pour tout naturel n non nul : $p_n > 0,25$.

   (b) $p_{n+1} - p_n = 0,8p_n + 0,05 - p_n = -0,2p_n + 0,05$.
Or on vient de démontrer que $p_n > 0,25$ qui entraîne
$-0,2p_n < -0,2 \times 0,25$ soit $-0,2p_n < -0,05 \iff -0,2p_n + 0,05 < 0$.
On a donc pour tout $n \geqslant 1$, $p_{n+1} - p_n < 0$, c'est-à -dire que la suite (p_n) est décroissante

(c) La suite (p_n) est décroissante et minorée par $0,25$: elle donc convergente vers un réel ℓ supérieur ou égal à $0,25$.

(d) Les suites (p_n) et (p_{n+1}) ayant la même limite ℓ, la relation de récurrence $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,05$ donne $\ell = 0,8\ell + 0,05 \iff 0,2\ell = 0,05 \iff$ $\ell = \dfrac{0,05}{0,2} = 0,25$.

$$\text{Conclusion : } \lim_{n\to+\infty} p_n = 0,25 = \frac{1}{4}.$$

Exercice 2

Partie A : étude de fonction

Partie A

1. $f(x) = xe^{x-1} + 1 = (x-1)\,e^{x-1} + e^{x-1} + 1$

   Or :

$$\left.\begin{array}{rr} & \displaystyle\lim_{x\to-\infty} x - 1 = {\color{red}-\infty} \\ \text{On pose } X = x-1 & \displaystyle\lim_{X\to{\color{red}-\infty}} Xe^X = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} (x-1)\,e^{x-1} = 0$$

$$\text{Et } \lim_{x\to-\infty} e^{x-1} + 1 = 0 + 1 = 1$$

   Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1}$$

   La courbe C admet donc une asymptote horizontale au voisinnage de $-\infty$ d'équation $y = 1$.

2.

$$\left.\begin{array}{r} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{x-1} = +\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty} \quad \text{(par produit puis somme)}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\begin{array}{ll} u(x) = x & v(x) = e^{x-1} \\ u'(x) = 1 & v'(x) = 1 \times e^{x-1} = e^{x-1} \end{array}$$

   Donc : $f = u \times v \Longrightarrow f' = u' \times v + u \times v'$. Ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times e^{x-1} + x \times e^{x-1} + 0 \\ &= e^{x-1} + xe^{x-1} \\ &= (x+1)\,e^{x-1} \end{aligned}$$

4. On obtient le tableau de signe de la dérivée puis les variations de la fonction :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	
e^{x-1}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-2}+1$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B

1. Par définition, $T_a \ : \ y = f'(a)\,(x-a) + f(a)$. Donc :

$$T_a \ : \ y = (a+1)\,\mathrm{e}^{a-1}\,(x-a) + a\mathrm{e}^{a-1} + 1$$

$$T_a \ : \ y = (a+1)\,\mathrm{e}^{a-1}x - (a+1)\,\mathrm{e}^{a-1}a + a\mathrm{e}^{a-1} + 1$$

2. Une droite d'équation $y = mx + p$ passe par l'origine du repère si, et seulement si, $p = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} T_a \text{ passe par l'origine} &\iff -(a+1)\,\mathrm{e}^{a-1}a + a\mathrm{e}^{a-1} + 1 = 0 \\ &\iff (-a^2 - a + a)\,\mathrm{e}^{a-1} + 1 = 0 \\ &\iff 1 - a^2\mathrm{e}^{a-1} = 0 \end{aligned}$$

3. En remarque déjà que 1 est effectivement solution de l'équation proposée. Pour démontrer que c'est la seule solution sur l'intervalle $]0;+\infty[$, on étudie la fonction $g(x) = 1 - x^2\mathrm{e}^{x-1}$.

   Déjà $g(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

   g est dérivable et donc, $\forall x \in \,]0;+\infty[$,

$$g'(x) = 0 - 2x\mathrm{e}^{x-1} - x^2\mathrm{e}^{x-1} = -x\,(2+x)\,\mathrm{e}^{x-1}$$

   On en déduit le tableau suivant :

x	0	$+\infty$
$-x$	0	$-$
$2+x$		$+$
e^{x-1}		$+$
$g'(x)$	0	$-$
$g(x)$	1	$-\infty$

On conclut, sachant que g est strictement décroissante, que ces valeurs vont de 1 en décroissant jusque $-\infty$. Ainsi la fonction g ne s'annule qu'une seule et unique fois. On sait que c'est pour la valeur $x = 1$.

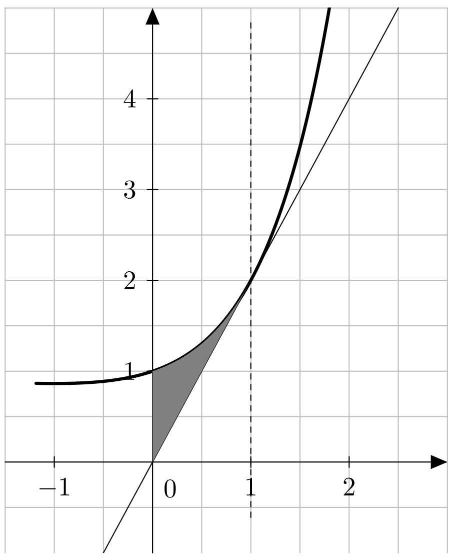
4. La tangente a donc pour équation :

$$T_1 \ : \ y = f'(1)x$$

Or $f'(1) = (1+1)e^{1-1} = 2e^0 = 2$, donc :

$$T_1 \ : \ y = 2x$$

Partie C : calcul d'aire

1. 

2. De façon évidente : $\displaystyle\int_0^1 x e^{x-1}\, dx = \frac{1}{e}$. L'aire du domaine $\mathcal{D}$ est donc la différence entre deux aires :

$$\mathcal{D} = \frac{1}{e} - 1$$

Exercice 3

1. f est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{7}{x^2}\right) = \dfrac{1}{2x^2}\left(x^2 - 7\right)$ qui est du signe de $x^2 - 7$.
Donc $f'(x) = 0 \iff x^2 - 7 = 0 \iff \left(x - \sqrt{7}\right)\left(x + \sqrt{7}\right) = 0 \iff x = \sqrt{7}$ ou $x = \sqrt{7}$.
Il y a donc une solution dans l'intervalle $]0~;~+\infty[$: $\sqrt{7}$.
Le trinÃ´me $x^2 - 7$ est positif sauf entre ses racines donc ici sur $\left]0~;~\sqrt{7}\right[$.
Conclusion : f est décroissante sur $\left]0~;~\sqrt{7}\right[$ puis croissante sur $\left]\sqrt{7}~;~+\infty\right[$; donc $f\left(\sqrt{7}\right)$ est le minimum de f sur $]0~;~+\infty[$.
$f\left(\sqrt{7}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{7} + \dfrac{7}{\sqrt{7}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{7} + \sqrt{7}\right) = \sqrt{7}$. Par définition du minimum, on a donc pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant \sqrt{7}$ y compris $u_0 = 3$, car $3^2 > 7$.

2. (a) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{7}{u_n}\right) - u_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{7}{u_n} - u_n\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{7 - u_n^2}{u_n}\right)$.
Comme $\dfrac{1}{2} > 0$, $u_n > 0$ et que $u_n \geqslant \sqrt{7} \Rightarrow u_n^2 \geqslant 7 \Rightarrow u_n^2 - 7 \geqslant 0 \Rightarrow 7 - u_n^2 \leqslant 0$, on en conclut que
$$u_{n+1} - u_n \leqslant 0$$
Donc la suite (u_n) est décroissante.
(b) La suite (u_n) étant décroissante et minorée par $\sqrt{7}$ est donc convergente vers une limite supérieure ou égale à $\sqrt{7}$.
(c) $\ell = \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{7}{\ell}\right) \iff 2\ell = \ell + \dfrac{7}{\ell} \iff \ell = \dfrac{7}{\ell} \iff \ell^2 = 7 \iff \ell = \sqrt{7}$ (puisque la limite est positive).

3. $u_{n+1} - \sqrt{7} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{7}{u_n}\right) - \sqrt{7} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{7}{u_n} - 2\sqrt{7}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u_n^2 + 7 - 2u_n\sqrt{7}}{u_n}\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\left(u_n - \sqrt{7}\right)^2}{u_n}$. (identité remarquable)

4. (a) *Initialisation* : $u_0 - \sqrt{7} = 3 - \sqrt{7} \approx 0,35$ et $d_0 = 1$.
On a bien $u_0 - \sqrt{7} \leqslant d_0$.
Hérédité :
Remarque préliminaire : on a démontré que $u_n \geqslant \sqrt{7}$, donc $u_n > 1$ ou encore $\dfrac{1}{u_n} < 1$ (2).
Supposons qu'il existe un naturel n tel que $u_n - \sqrt{7} \leqslant d_n$.
On a démontré à la question 3 que :
$u_{n+1} - \sqrt{7} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\left(u_n - \sqrt{7}\right)^2}{u_n}$. Donc comme $u_n - \sqrt{7} \leqslant d_n \Rightarrow \left(u_n - \sqrt{7}\right)^2 \leqslant d_n^2$, l'égalité du 3 donne :

$u_{n+1} - \sqrt{7} < \frac{1}{2}d_n^2 \times \frac{1}{u_n} < \frac{1}{2}d_n^2$ d'après l'inégalité (2) ci-dessus.

Finalement $u_{n+1} - \sqrt{7} < \frac{1}{2}d_n^2 \iff u_{n+1} - \sqrt{7} < d_{n+1}$.

L'hérédité est établie.

Pour tout entier naturel n,

$$u_n - \sqrt{7} \leqslant d_n.$$

(b) L'algorithme indique que pour que $d_n \leqslant 10^{-9}$ il faut que $n \geqslant 5$.

On a donc $d_5 \leqslant 10^{-9}$.

Comme $u_5 - \sqrt{7} < u_5$ c'est-à-dire $u_5 - \sqrt{7} < 10^{-9}$, on en déduit que u_5 est une valeur approchée par excès de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près.

Exercice 4 (spécifique)

1. $z' = \frac{2z}{|z|} - z = \frac{2r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{r} - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = (2-r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$.

2. Avec $z = 3$, la formule précédente donne $z_{\mathrm{A}'} = (2-3)\mathrm{e}^{0\mathrm{i}} = -1$.

3. (a) B a pour affixe $b = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$. On a donc $|b^2| = 3 + 1 \Rightarrow |b| = 2$. On peut écrire $b = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

   (b) $z_{\mathrm{B}'} = (2-2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = 0 = z_{\mathrm{O}}$.

4. cf. figure.

5. (a) Il s'agit de résoudre $z' = 0 \iff (2-r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \iff r = 2$ ou $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = 0$. L'ensemble des points dont l'image par f est O est le cercle de centre O et de rayon 2.

   (b) cf. figure.

6. Points invariants par f : on cherche les complexes z tels que $z = \frac{z}{|z|}(2-|z|) \iff z|z| = 2z - z|z| \iff 2z|z| = 2z \overset{\text{car } z\neq 0}{\iff} |z| = 1$. L'ensemble cherché est bien le cercle $\mathcal{C}_1$.

7. M a pour affixe z avec $|z| \neq 1$.

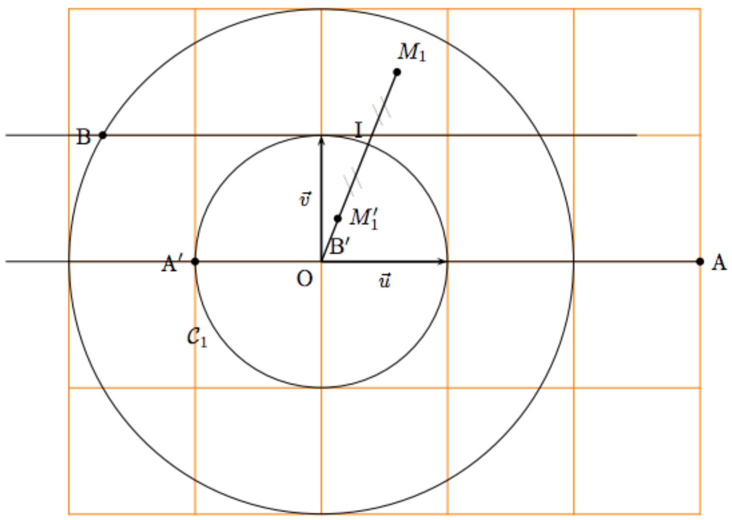
   (a) D'après la question 1, l'affixe du point I est $\frac{1}{2}\left[r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right] = \frac{1}{2} \times 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ qui est un complexe de module 1 quel que soit α.

   Le milieu I de [MM'] appartient à $\mathcal{C}_1$.

   (b) I et M ont à 2π près le même argument : ils sont donc alignés avec O et I appartient à la demi-droite $[\mathrm{O}M)$.

   (c) Construction de l'image de M_1 :

   - la demi-droite $[\mathrm{O}M)$ coupe le cercle $\mathcal{C}_1$ au point I ;
   - il suffit de construire le point image M_1' symétrique de M_1 autour de I.



Exercice 4 (spécialité)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. D'après la formule des probabilités totales:

$$\begin{aligned} a_{n+1} = P\left(A_{n+1}\right) &= P\left(A_n \cap A_{n+1}\right) + P\left(B_n \cap A_{n+1}\right) + P\left(C_n \cap A_{n+1}\right) \\ &= P\left(A_n\right) \times P_{A_n}\left(A_{n+1}\right) + P\left(B_n\right) \times P_{B_n}\left(A_{n+1}\right) + P\left(C_n\right) \times P_{C_n}\left(A_{n+1}\right) \end{aligned}$$

Si, après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page num 1 (événement A_n), il ne reste pas sur cette page donc $P_{A_n}\left(A_{n+1}\right) = 0$.

Si, après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page num 2 (événement B_n), il ira sur la page num 1 avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ donc $P_{B_n}\left(A_{n+1}\right) = \frac{1}{2}$.

Si, après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page num 3 (événement C_n), il ira sur la page num 1 avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ donc $P_{C_n}\left(A_{n+1}\right) = \frac{1}{2}$.

De plus $P\left(A_n\right) = a_n$, $P\left(B_n\right) = b_n$ et $P\left(C_n\right) = c_n$.

Donc $a_{n+1} = a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$

On aurait pu aussi construire un arbre pondéré pour représenter la situation.

On admet que, de même, $b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$ et $c_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$.

2. D'après la question précédente:

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & 0 \times a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ b_{n+1} & = & \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} & = & \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

Donc en prenant $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ on a $U_{n+1} = MU_n$.

Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $U_n = M^n U_0$.

- Pour $n = 0$, $M^0 U_0 = U_0$ car M^0 est la matrice identité $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  Donc la propriété est vraie au rang 0.
- On suppose que la propriété est vraie au rang p avec $p \geqslant 0$, c'est-à-dire $U_p = M^p U_0$.
  On sait que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n$ donc $U_{p+1} = MU_p$.
  Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $U_p = M^p U_0$, donc $u_{p+1} = M \times M^p U_0 = M^{p+1} U_0$.
  Donc la propriété est vraie au rang $p + 1$.
- La propriété est vraie au rang 0; elle est héréditaire, donc elle est pour tout $n \geqslant 0$.

Donc, pour tout entier naturel n, $U_n = M^n U_0$.

3. Pour n entier non nul, on a: $M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n \times 2}{3} & \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} + \frac{\left(-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \times 2}{3} & \frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \end{pmatrix}$

$$U_n = M^n U_0 \iff \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n \times 2}{3} & \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} + \frac{\left(-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \times 2}{3} & \frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a_n = \left(\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n \times 2}{3}\right) a_0 + \left(\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right) b_0 + \left(\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right) c_0 \\ b_n = \frac{1}{4} a_0 + \frac{1}{4} b_0 + \frac{1}{4} c_0 \\ c_n = \left(\frac{5}{12} + \frac{\left(-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \times 2}{3}\right) a_0 + \left(\frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right) b_0 + \left(\frac{5}{12} + \frac{-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right) c_0 \end{cases}$$

On constate que $b_n = \frac{1}{4} a_0 + \frac{1}{4} b_0 + \frac{1}{4} c_0 = \frac{1}{4} (a_0 + b_0 + c_0)$; or $a_0 + b_0 + c_0 = 1$ donc $b_n = \frac{1}{4}$.

On sait qu'une suite géométrique de raison q où $-1 < q < 1$ est convergente vers 0 donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$; on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n \times 2}{3} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{-3} = 0$.

D'après les théorèmes sur les limites, on peut dire:

$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \dfrac{1}{3}a_0 + \dfrac{1}{3}b_0 + \dfrac{1}{3}c_0 = \dfrac{1}{3}\left(a_0 + b_0 + c_0\right) = \dfrac{1}{3}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = \dfrac{5}{12}a_0 + \dfrac{5}{12}b_0 + \dfrac{5}{12}c_0 = \dfrac{5}{12}\left(a_0 + b_0 + c_0\right) = \dfrac{5}{12}$.

4. $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \dfrac{1}{3}$ donc, à long terme, la page 1 du site sera consultée $100 \times \dfrac{1}{3} \approx 33,33\,\%$ du temps de visite.

   $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \dfrac{1}{4}$ donc, à long terme, la page 2 du site sera consultée $100 \times \dfrac{1}{4} = 25\,\%$ du temps de visite.

   $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = \dfrac{5}{12}$ donc à long terme, la page 3 du site sera consultée $100 \times \dfrac{5}{12} \approx 41,67\,\%$ du temps de visite.