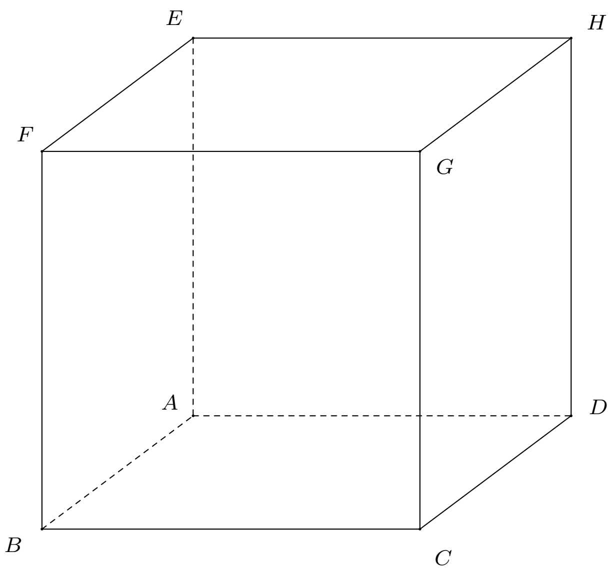
Exercice Type Bac - Géométrie dans l'espace

Exercice 1 *Centres étrangers - juin 2012*

On considère un cube ABCDEFGH d'arète de longueur 1.
On se place dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

On considère les points $\mathrm{I}\left(1\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ 0\right)$, $\mathrm{J}\left(0\ ;\ \dfrac{2}{3}\ ;\ 1\right)$, $\mathrm{K}\left(\dfrac{3}{4}\ ;\ 0\ ;\ 1\right)$ et $\mathrm{L}(a\ ;\ 1\ ;\ 0)$ avec a un nombre réel appartenant Ã l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.



Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).
2. Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{array}\right. \quad , \ t' \in \mathbb{R}$$

3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, $a = \dfrac{1}{4}$.

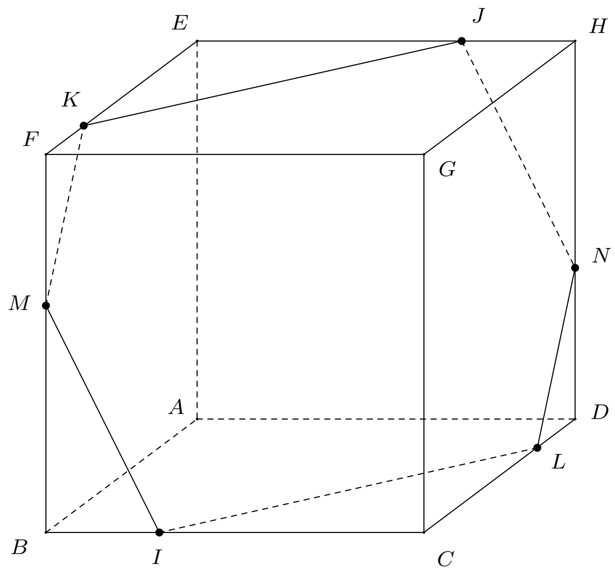
Partie B

Dans la suite de l'exercice, on pose $a = \frac{1}{4}$.
Le point L a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$.

1. Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.

2. La figure ci-dessous fait apparaître l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube ABCDEFGH telle qu'elle a été obtenue à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

   On désigne par M le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF) et par N le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DH).



   Le but de cette question est de déterminer les coordonnées des points M et N.

   (a) Prouver que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées (8 ; 9 ; 5) est un vecteur normal au plan (IJK).
   (b) En déduire que le plan (IJK) a pour équation $8x + 9y + 5z - 11 = 0$.
   (c) En déduire les coordonnées des points M et N

Exercice 2 *Amérique du sud - novembre 2012*

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x-y+3z-1 = 0$ et soit S le point de coordonnées (1 ; 3 ; 5).

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie. ou fausse, et proposer une démonstration de la réponse indiquée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

1. Les points d'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec les trois axes du repère sont les sommets d'un triangle isocèle.

2. La droite δ_1 de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+t \\ y & = & 5-4t \\ z & = & 2-2t \end{array}\right. ,t \in \mathbb{R}$$

   est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

3. La droite δ_2 de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -t \\ y &=& 7+4t \\ z &=& 7+2t \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}$$

est la droite parallèle Ã la droite δ_1 passant par le point S.

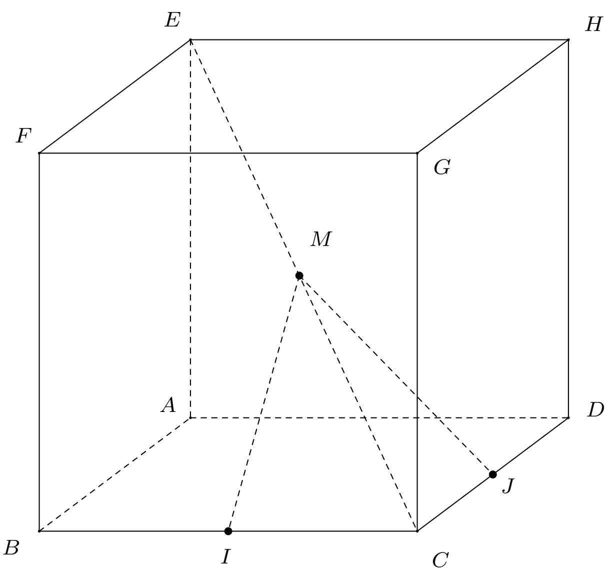
4. Le projeté orthogonal du point S sur le plan $\mathcal{P}$ a pour coordonnées

$$\left(-\frac{6}{7} ; \frac{55}{14} ; \frac{31}{14}\right).$$

5. Le plan $\mathcal{P}$ coupe la sphère de centre S et de rayon 3.

Exercice 3 *Centres étrangers - juin 2011*

La figure ci-dessous représente un cube ABCDEFGH d'arête 1.
On désigne par I et J les milieux respectifs des arêtes [BC] et [CD].
Soit M un point quelconque du segment [CE].
Dans tout l'exercice, on se place dans le repère orthonormal $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1. (a) Donner, sans justification, les coordonnées des points C, E, I et J.
   (b) Justifier l'existence d'un réel t appartenant à l'intervalle [0 ; 1], tel que les coordonnées du point M soient $(1-t \ ; \ 1-t \ ; \ t)$.
2. (a) Démontrer que les points C et E appartiennent au plan médiateur du segment [IJ].
   (b) En déduire que le triangle MIJ est un triangle isocèle en M.
   (c) Exprimer IM^2 en fonction de t.
3. Le but de cette question est de déterminer la position du point M sur le segment [CE] pour laquelle la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{I}M\mathrm{J}}$ est maximale.
   On désigne par θ la mesure en radian de l'angle $\widehat{\mathrm{I}M\mathrm{J}}$.

(a) En admettant que la mesure θ appartient à l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$, démontrer que la mesure θ est maximale lorsque $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ est maximal.

(b) En déduire que la mesure est maximale lorsque la longueur $\mathrm{I}M$ est minimale.

(c) Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par :

$$f(t) = 3t^2 - t + \frac{1}{4}.$$

(d) En déduire qu'il existe une unique position M_0 du point M sur le segment [EC] telle que la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{I}M\mathrm{J}}$ soit maximale.

(e) Démontrer que le point M_0 est le projeté orthogonal du point I sur le segment [EC].